en négligeant le produit des infiniments petits :

$$-\frac{P}{\eta L} = \frac{dt}{dr} + \frac{t}{r} \tag{15}$$

par intégration de cette équation on obtient :

$$t = \frac{-Pr}{2\eta L} + \frac{C}{r} \tag{16}$$

appelons r_0 le rayon pour lequel $t = 0$. Alors

$$-\frac{Pr_0}{2\eta L} + \frac{C}{r_0} = 0$$

d'où :

$$r_0 = \sqrt{\frac{2\eta CL}{P}} \tag{17}$$

Pour ce rayon r_0 la force de frottement visqueux sera nulle puisque $\frac{dv}{dr} = 0$ c'est donc précisément le rayon effectif que nous cherchons.

L'écoulement visqueux du liquide entre piston et cylindre a pour résultat d'accroître le rayon du piston de r_1 à r_0.

La constante C est fixée par les conditions aux limites.

Reprenons

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{Pr}{2\eta L} + \frac{C}{r} \tag{16}$$

après intégration

$$v = -\frac{Pr^2}{4\eta L} + C \log r + K. \tag{18}$$

La vitesse s'annule à la surface du piston et du cylindre, c'est-à-dire $n = 0$ pour $r = r_1$ et $r = r_2$. Donc

$$-\frac{P(r_2^2 - r_1^2)}{\eta L} = C \log \frac{r_1}{r_2}$$

$$C = -\frac{P}{4\eta L} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{\log \frac{r_1}{r_2}}. \tag{19}$$

Introduisons (19) dans (17)

$$r_0 = \sqrt{-\frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \log \frac{r_1}{r_2}}} = \sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \log \frac{r_2}{r_1}}}. \tag{20}$$

Cette expression du rayon effectif est identique à celle définie par Meyers et Jessup (21).

Michels arrive à une valeur du rayon effectif qui diffère de l'expression (20); la différence provient du fait que cet auteur a simplifié le problème en faisant l'hypothèse que les deux parois sont planes et parallèles. Dans ce cas spécial l'expression (14) se simplifie :

$$-\mathrm{PY}\,dr = \eta\,\mathrm{LY}\,(t + dt) - \eta\,\mathrm{LY}\,t$$

Y étant la largeur de la paroi.
Ou encore :

$$-\frac{\mathrm{P}}{\eta\,\mathrm{L}}\,dr = \mathrm{Ct}.$$

Par intégration :

$$t = -\frac{\mathrm{P}}{\eta\,\mathrm{L}}\,r + \mathrm{C}.$$

Si r_0 désigne de nouveau le rayon pour lequel $t = 0$ on obtient :

$$r_0 = \frac{\mathrm{C}\,\eta\,\mathrm{L}}{\mathrm{P}}. \tag{21}$$

L'intégration de

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\mathrm{P}}{\eta\,\mathrm{L}}\,r - \mathrm{C}r$$

donne lieu à

$$v = -\frac{\mathrm{P}}{2\eta\,\mathrm{L}}\,r^2 + \mathrm{C}r + \mathrm{K}$$

v étant $= 0$ pour $r = r_1$ et $r = r_2$ nous avons :

$$0 = -\frac{\mathrm{P}}{2\eta\,\mathrm{L}}\,(r_2^2 - r_1^2) + \mathrm{C}\,(r_2 - r_1)$$

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{P}}{2\eta\,\mathrm{L}}\,(r_2 + r_1).$$

En introduisant cette valeur dans (21) il suit :

$$r_0 = \frac{r_2 + r_1}{2}.$$

Le rayon effectif est égal à la moyenne arithmétique des rayons du piston et du cylindre. (Signalons que MICHELS arrive à ce même résultat par une méthode différente.)

MEYERS et JESSUP ont montré que l'expression (20) peut être développée en série. Posons

$$\frac{r_2}{r_1} - 1 = x$$

d'autre part

$$\log\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots$$